

Тернопільський національний технічний  
університет імені Івана Пулюя

---

Кафедра автоматизації  
технологічних процесів  
і виробництв

Лабораторна робота № 3  
з курсу  
”Цифрова обробка сигналів та  
зображень”

Неперервний спектральний  
аналіз сигналів

Тернопіль 2017

Методичні вказівки до лабораторної роботи № 3 "Неперервний спектральний аналіз сигналів" з курсу "Цифрова обробка сигналів та зображень". Автори: Пісьціо В.П., Медвідь В.Р., Тернопіль: ТНТУ, 2017 - 17 с.

Для студентів напрямку: 6.050201 "Системна інженерія "

Автори: Пісьціо В.П., Медвідь В.Р.

Розглянуто і затверджено на засіданні кафедри автоматизації технологічних процесів і виробництв (протокол № 1 від 22.08.2017 року)

## Тема роботи

Неперервний спектральний аналіз сигналів.

## Мета роботи

Ознайомлення із основами рядів та перетворення Фур'є для неперервного спектрального аналізу сигналів.

### Спектральні представлення сигналів

Одним із потужних методів аналізу сигналів є спектральний аналіз. За допомогою спектрального аналізу можна визначати наявність і відсутність у сигналі деяких періодичних складових, порівнювати отриманий сигнал із заданим еталоном чи перетворювати сигнал для подальшого аналізу. Серед різноманітних систем ортогональних функцій, які можуть використовуватися в якості базисів для представлення сигналів, виняткове місце займають гармонійні (синусоїдальні і косинусоїдальні) функції. Значення гармонійних сигналів для радіотехніки обумовлено рядом причин. Зокрема:

1. Гармонійні сигнали інваріантні відносно перетворень, здійснюваних стаціонарними лінійними електричними колами. Якщо таке коло збуджено джерелом гармонійних коливань, то сигнал на виході кола залишається гармонійним з тією ж частотою, відрізняючись від вхідного сигналу лише амплітудою і початковою фазою.

2. Техніка генерування гармонічних сигналів відносно проста.

Якщо сигнал представлений у вигляді суми гармонійних коливань з різними частотами, то кажуть, що здійснено спектральне розкладання цього сигналу. Окремі гармонійні компоненти сигналу утворюють його спектр.

### Ряд Фур'є

У подальшому будемо використовувати скалярний добуток:

$$(x(t); y(t)) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot \overline{y(t)} dt \quad (1)$$

Задамо на відріzk часу  $[-T/2, T/2]$  ортонормований базис, утворений гармонійними функціями з кратними частотами:

$$\begin{aligned} u_0 &= 1/\sqrt{T} & u_1 &= \sqrt{2/T} \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) & v_1 &= \sqrt{2/T} \cdot \sin(\omega_1 \cdot t) \dots \\ u_n &= \sqrt{2/T} \cdot \cos(\omega_1 \cdot n \cdot t) & v_n &= \sqrt{2/T} \cdot \sin(\omega_1 \cdot n \cdot t) \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\omega_1 = 2\pi/T$  - основна частота.

Будь-яка функція  $\{u_n, v_n\}$  з цього базису задовольняє умові періодичності.

Виконавши розклад сигналу  $s(t)$  в цьому базисі, тобто обчисливши коефіцієнти  $c_n = (s(t); u_n)$ ,  $d_n = (s(t); v_n)$  отримаємо спектральний розклад:

$$s(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot u_n + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cdot v_n \quad (3)$$

У розгорнутому вигляді:

$$s(t) = c_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \cos(\omega_1 \cdot n \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sqrt{\frac{2}{T}} \cdot \sin(\omega_1 \cdot n \cdot t) \quad (4)$$

де коефіцієнти  $c_n, d_n$  визначаються за формулами

$$c_0 = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \frac{1}{\sqrt{T}} dt \quad c_n = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \cos(\omega_1 \cdot n \cdot t) dt \quad d_n = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \sqrt{\frac{2}{T}} \sin(\omega_1 \cdot n \cdot t) dt \quad (5)$$

Традиційно також застосовують інше представлення коефіцієнтів ряду, що враховує іншим чином множник  $1/\sqrt{T}$  у ряді.

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(\omega_1 \cdot n \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(\omega_1 \cdot n \cdot t) \quad (6)$$

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) dt \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \cos(\omega_1 \cdot n \cdot t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \cdot \sin(\omega_1 \cdot n \cdot t) dt$$

Кожну гармоніку можна описати її амплітудою  $A_n$  і початковою фазою  $\varphi_n$ . Для цього коефіцієнти ряду Фур'є слід записати у вигляді:

$$a_n = A_n \cos \varphi_n \quad b_n = A_n \sin \varphi_n, \quad (7)$$

$$\text{де } A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{tg} \varphi_n = b_n / a_n$$

Тоді отримаємо іншу, еквівалентну форму ряду Фур'є:

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(\omega_1 \cdot n \cdot t - \varphi_n) \quad (8)$$

яка іноді виявляється зручніше.

### Спектральна діаграма періодичного сигналу.

Графічне зображення коефіцієнтів ряду Фур'є для конкретного сигналу прийнято називати спектральною діаграмою. Розрізняють амплітудні і фазові спектральні діаграми. По горизонтальній осі в деякому масштабі відкладені частоти гармонік, а по вертикальній осі представлені їх амплітуди і початкові фази.

З формул для коефіцієнтів ряду Фур'є слідує, що парний сигнал має тільки косінусоїдальні, а непарний - тільки синусоїдальні складові. Коливання з номерами  $i = 2, 3, \dots$  зазвичай називають вищими гармоніками.



Рис. 1. Спектральні діаграми деякого періодичного сигналу.

а — амплітудна; б — фазова

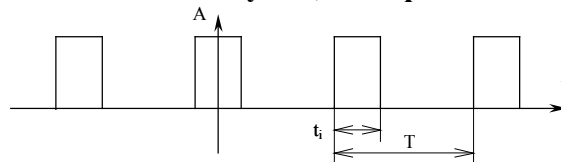


Рис. 2. Послідовність прямокутних відео імпульсів

Розглянемо ряд Фур'є, періодичної послідовності прямокутних відео імпульсів  $s(t)$  з відомими параметрами  $t$ ,  $T$ ,  $A$ , парної відносно точки  $t_i = 0$ . Відношення  $q = T/t_i$  називають скважність імпульсів. За наведеними формулами:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q}, \quad a_n = \frac{2A}{T} \int_{-t_i/2}^{t_i/2} \cos(\omega_1 \cdot n \cdot t) dt = 2A \cdot \frac{\sin(\omega_1 n t_i / 2)}{\omega_1 n} \quad (9)$$

Отже ряд Фур'є можна записати у вигляді:

$$s(t) = \frac{A}{q} \cdot \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/q)}{n\pi/q} \cos(n\omega_1 t) \right] \quad (10)$$

Функцію  $\frac{\sin x}{x}$  називають функцією вибірки (одиничного відліку). На наступному рисунку представлені амплітудні діаграми в двох крайніх випадках.

Важливо відзначити, що послідовність коротких імпульсів, що слідує один за одним досить рідко ( $q \gg 1$ ), має багатший спектральний склад. Прийнято говорити, що спектральна діаграма розглянутого виду має пелюсткову структуру.



**Рис. 3. Амплітудний спектр періодичної послідовності прямокутних відео імпульсів: а - при великій і ; б - при малій скважності**  
**Комплексна форма ряду Фур'є**

Спектральний розклад періодичного сигналу можна виконати і дещо по-іншому, використовуючи систему базисних функцій, що складається з експонент з уявними показниками:

$$\{u_k\} = \left\{ \frac{\exp(jk\omega_1 t)}{\sqrt{T}} \right\} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \quad (11)$$

Легко бачити, що функції цієї системи періодичні з періодом  $T$  і ортонормовані на відріжку часу  $[-T/2, T/2]$ , так як

$$(u_m, u_n) = \int_{-T/2}^{T/2} u_m \overline{u_n} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp(j(m-n)\omega_1 t) dt = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m \\ 0 & \text{при } n \neq m \end{cases} \quad (12)$$

Ряд Фур'є довільного періодичного сигналу в даному випадку приймає вид

$$s(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_1 t} \quad (13)$$

з коефіцієнтами

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (14)$$

Також може бути застосовна наступна форма запису із іншим нормуванням:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_1 t} \quad C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (15)$$

Вона теж використовує систему базисних функцій, що складається з експонент з уявними показниками:

$$\{u_k\} = \{\exp(jk\omega_1 t)\} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots \text{ при використанні скалярного добутку}$$

$$(u_m, u_n) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u_m \overline{u_n} dt \quad (16)$$

В обох випадках спектр сигналу містить компоненти на негативній півосі частот, причому для сигналів, що набувають виключно дійсних значень  $c_{-n} = \overline{c_n}$ . Зазвичай у такому випадку негативні значення частот не несуть додаткової інформації і їх виключають із аналізу. А доданки з позитивними і негативними частотами об'єднуються в пари, наприклад:

$$c_n e^{jn\omega_1 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_1 t} = |c_n| \exp(j(n\omega_1 t + \varphi_n)) + |c_n| \exp(-j(n\omega_1 t + \varphi_n)) = 2|c_n| \cos(n\omega_1 t + \varphi_n)$$

Легко довести, що якщо сигнал  $f(t)$  є парною функцією, то уявні складові всіх комплексних коефіцієнтів рівні 0, якщо ж функція  $f(t)$  непарна – нульовими стають дійсні частини всіх коефіцієнтів. Це пов'язано з тим, що дійсна частина комплексної експоненти  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$  – парна функція, а уявна частина – функція непарна. Що ще більше зменшує кількість коефіцієнтів, котрі розглядаються.

### Інтегральне перетворення Фур'є

Ряди Фур'є допускають глибоке узагальнення, що дозволяє отримувати спектральні характеристики неперіодичних сигналів.

### Перехід від ряду Фур'є до інтегрального перетворення

Нехай  $s(t)$  - одиночний імпульсний сигнал кінцевої тривалості. Доповнивши його такими ж сигналами для отримання періодичного сигналу через деякий інтервал часу  $T$ , отримаємо розглянуту раніше періодичну послідовність  $s'(t)$ , яка може бути представлена у вигляді комплексного ряду Фур'є:

$$s'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(j\omega_n t); \quad (17)$$

з коефіцієнтами

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-j\omega_n t) dt. \quad (18)$$

Позначимо  $\omega_1 = \Delta\omega$ ,  $\omega_n = \omega(n)$ . Використавши представлення першої та  $n$ -тої частот  $\omega_1 = \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$  можемо записати вираз для коефіцієнтів у формі:

$$C_n = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-j\omega(n)t) dt. \quad (19)$$

Поділимо коефіцієнти  $C_n$  на  $\frac{\Delta\omega}{2\pi}$ , а щоб сума ряду не змінювалась помножимо кожен з базисних функцій на  $\frac{\Delta\omega}{2\pi}$ . Отримаємо представлення:

$$C'_n = \int_{-T/2}^{T/2} s(t) \exp(-j\omega_n t) dt; \quad (20)$$

$$s'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C'_n \exp(j\omega_n t) \frac{\Delta\omega}{2\pi}. \quad (21)$$

Зауважимо, що функція  $\omega_n = \omega(n)$  - є лінійною, тому можна вважати, що  $C'_n$  є функція від  $\omega(n)$ . Спрямовуючі  $T \rightarrow \infty$ , а відповідно  $\Delta\omega \rightarrow 0$  переходимо від ряду до інтегралу

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C'(\omega(n)) \exp(j\omega(n)t) d\omega. \quad (22)$$

Одночасно інтеграл (18) перетвориться на:

$$C''(\omega) = S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt. \quad (23)$$

Функція  $S(\omega)$  носить назву спектральної щільності сигналу  $s(t)$ . А відповідна формула (23) здійснює пряме перетворення Фур'є даного сигналу. З іншого боку формула (22) здійснює зворотну операцію - котра називається зворотне перетворення Фур'є.

Отже сигнал  $s(t)$  та його спектр  $S(\omega)$  взаємо однозначно пов'язані прямим і зворотним перетвореннями Фур'є:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \exp(-j\omega t) dt; \quad (24)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) \exp(j\omega t) d\omega. \quad (25)$$

Використання спектрального розкладу значно полегшує роботу із сигналами. Наприклад, часто математична модель сигналу, представлена функцією  $s(t)$ , складна і недостатньо наочна. У той же час опис цього сигналу в частотній області за допомогою функції  $S(\omega)$  може виявитися простим. Крім того спектральне подання сигналів відкриває прямий шлях до аналізу проходження сигналів через широкий клас кіл, пристроїв і систем.

### Основні властивості перетворення Фур'є

Із визначення перетворення Фур'є випливає властивість лінійності:

якщо  $s(t) = x(t) + y(t)$ , то  $S(\omega) = X(\omega) + Y(\omega)$ .

### **Властивості дійсної і уявної частин спектральної щільності**

Нехай  $s(t)$  - сигнал, що приймає дійсні значення. Його спектральна щільність в загальному випадку є комплексною:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \sin \omega t dt = A(\omega) - jB(\omega). \quad (26)$$

Підставимо цей вираз в формулу зворотного перетворення Фур'є

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\omega) - jB(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) d\omega. \quad (27)$$

Для того щоб сигнал, отриманий шляхом такого дворазового перетворення, залишався дійсним, необхідно щоб:

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \sin(\omega t) d\omega = 0 \quad \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cos(\omega t) d\omega = 0. \quad (28)$$

Це можливо лише в тому випадку, коли дійсна частина  $A(\omega)$  - парна, а уявна частина  $B(\omega)$  - непарна функція частоти:

$$A(\omega) = A(-\omega), \quad B(\omega) = -B(-\omega). \quad (29)$$

### **Спектральна щільність сигналу, зміщеного в часі і за частотою**

Припустимо, що для сигналу  $s(t)$  відома відповідність  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ . Розглянемо такий же сигнал, але зсунутий на час  $t_0$ . Тоді:

$$s(t - t_0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega t_0} e^{-j\omega x} dx = S(\omega) e^{-j\omega t_0}. \quad (30)$$

Модуль комплексного числа  $\exp(-j\omega t_0)$  при будь-яких  $t_0$  дорівнює одиниці, тому амплітуди елементарних гармонійних складових, з яких складається сигнал, що не залежать від його положення на осі часу. Інформація про цю характеристику сигналу є у частотній залежності аргументу спектральної щільності (фазовому спектрі).

Припустимо, що знову для сигналу  $s(t)$  відома відповідність  $s(t) \leftrightarrow S(\omega)$ . Розглянемо такий ж сигнал, але із спектральною щільністю зсунутою на частоту  $\omega_0$ :  $F(\omega) = S(\omega + \omega_0)$ . Скориставшись зворотнім перетворенням Фур'є маємо:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega + \omega_0) \cdot e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S(v) \cdot e^{j(v - \omega_0)t} \cdot dv = s(t) \cdot e^{-j\omega_0 t}. \quad (31)$$

Отже перенесення спектру сигналу за частотою на  $\omega_0$  відповідає множенню сигналу на комплексну експоненту  $e^{-j\omega_0 t}$ .

### **Залежність спектральної щільності сигналу від вибору масштабу виміру часу**

Припустимо, що вихідний сигнал  $s(t)$  підданий зміні масштабу часу. Це означає, що роль часу  $t$  грає нова незалежна змінна  $kt$  (до  $k$  - деяке дійсне число). Якщо  $k > 1$ , то відбувається «стиснення» вихідного сигналу; якщо ж  $0 < k < 1$ , то сигнал «розтягується» в часі. Якщо

$$\text{то } s(t) \leftrightarrow S(\omega), \text{ то } s(kt) \leftrightarrow \frac{1}{|k|} S\left(\frac{\omega}{k}\right). \quad (32)$$

$$\text{Дійсно } s(kt) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(kt) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\frac{\omega}{k}x} dx, \text{ звідки впливає формула (32).}$$

Отже, для того, щоб, скоротити сигнал у часі, зберігаючи його форму, необхідно розподілити ті ж спектральні компоненти в більш широкому інтервалі частот при відповідному пропорційному зменшенні їх амплітуд, а фаза компонент мінятися не має.

### **Спектр оберненого імпульсу**

Нехай є імпульс  $s(t)$ , відмінний від нуля на відрізку  $[0, \tau_1]$ , що має спектральну щільність  $S_1(\omega)$ . Потрібно знайти спектральну щільність  $S'(\omega)$  «оберненого в часі» сигналу

$$s_1(t) = s(-t) \quad (33)$$

за формулою перетворення Фур'є :

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(-t) \cdot e^{-j\omega t} dt, \quad (34)$$

використовуючи заміну  $x = -t$ , знаходимо :

$$S_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) \cdot e^{j\omega x} dx = S(-\omega), \text{ а для дійсних сигналів } S_1(\omega) = \overline{S(-\omega)} \quad (35)$$

### Спектральна щільність похідної і невизначеного інтеграла

Нехай сигнал  $s(t)$  і його спектральна щільність  $S(\omega)$  задані. Знайдемо спектральну щільність його похідної  $f(t) = \frac{d}{dt}s(t)$ . За визначенням,

$$f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(t - \tau)}{\tau}. \quad (36)$$

Перетворення Фур'є - лінійна операція, тому, рівність (38) справедлива і по відношенню до спектральних щільностей.

$$F(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-j\omega\tau)}{\tau} S(\omega) = j\omega S(\omega). \quad (37)$$

З іншого боку функція  $s(t)$  є інтегралом від  $f(t)$   $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ , тому можна записати:

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \frac{F(\omega)}{j\omega}. \quad (38)$$

Отже множник  $1/(j\omega)$  служить оператором інтегрування в частотній області, а множник  $j\omega$  - оператором диференціювання.

### Спектральна щільність добутку і згортки сигналів

При сумуванні сигналів їх спектри додаються, однак спектр добутку сигналів не рівний добутку спектрів. Нехай  $u(t)$  та  $v(t)$  — два сигнали, для котрих відомі спектральні щільності  $U(\omega)$  та  $V(\omega)$ .

Знайдемо перетворення Фур'є добутку двох сигналів. За загальним правилом:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (39)$$

Представимо  $v(t)$  через його спектральну щільність :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) e^{j\xi t} d\xi \right] e^{-j\omega t} dt. \quad (40)$$

Змінюючи порядок інтегрування маємо

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j(\omega - \xi)t} dt \right] d\xi; \quad (41)$$

звідки :

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) U(\omega - \xi) d\xi. \quad (42)$$

Інтеграл, у правій частині називають згорткою функцій  $V$  та  $U$ . В подальшому будемо її позначати так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} V(\xi) U(\omega - \xi) d\xi = V(\omega) * U(\omega). \quad (43)$$

Таким чином, спектральна щільність добутку двох сигналів з точністю до постійного числового множника дорівнює згортці спектральних щільностей співмножників:

$$u(t) v(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} V(\omega) * U(\omega). \quad (44)$$

Легко переконатися, що операція згортки комутативна, тобто допускає зміну порядку функцій:

$$V(\omega) * U(\omega) = U(\omega) * V(\omega). \quad (45)$$



Аналогічно можна довести, що добутку двох спектральних щільностей відповідає згортка сигналів: якщо  $s_1(t) \leftrightarrow S_1(\omega)$ ,  $s_2(t) \leftrightarrow S_2(\omega)$ , то

$$S_1(\omega) \cdot S_2(\omega) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t - \xi) s_2(\xi) d\xi. \quad (46)$$

### Спектральна щільність типових сигналів

#### Спектральна щільність прямокутного відео імпульсу

Нехай є сигнал  $s(t)$ , що має амплітуду  $U$ , тривалість  $\tau_i$  і розташовується симетрично щодо початку відліку. На підставі формули перетворення

$$S(\omega) = U \int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} e^{-j\omega t} dt = U \int_{-\tau_i/2}^{\tau_i/2} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = 2U \int_0^{\tau_i/2} \cos \omega t dt = \frac{2U}{\omega} \sin \frac{\omega \tau_i}{2}. \quad (47)$$

Спектральна щільність розглянутого сигналу є дійсна функція частоти. Зручно ввести безрозмірну змінну  $\xi = \omega \tau_i/2$  і остаточно записати:

$$S(\xi) = U \tau_i \frac{\sin \xi}{\xi}. \quad (48)$$

Відмітимо, що значення спектральної щільності на нульовій частоті дорівнює площі імпульсу:  $S(0) = U \tau_i$ . Графік, побудований за формулою (32), зображений на наступному рисунку.

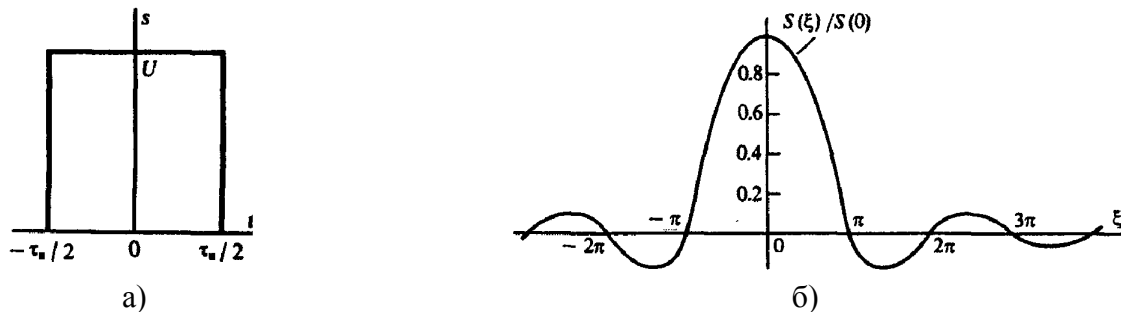


Рис. 4. Графік прямокутного відео імпульсу (а) та нормованої спектральної щільності  
Спектральна щільність дельта-функції

Нехай сигнал  $s(t)$  являє собою короткий імпульс, зосереджений в точці  $t = 0$  і має площу  $A$ . Такий сигнал має математичну модель  $s(t) = A \delta(t)$ . Спектральна щільність цього сигналу

$$S(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-j\omega t) \delta(t) dt.$$

Використовуючи фільтруючу властивість дельта-функції маємо:  $S(\omega) = A = \text{const}$ . Отже, дельта-імпульс має рівномірний спектр на всіх частотах.

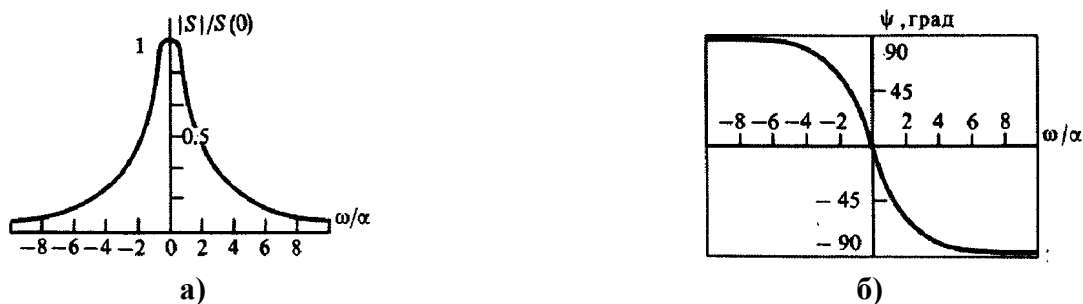
#### Спектральна щільність експоненціального відео імпульсу

Розглянемо сигнал, що описується функцією  $s(t) = U \exp(-\alpha t) \sigma(t)$  при позитивному значенні  $t$ , і рівний 0 при негативних  $t$ . Величина  $\alpha$ , такою, що  $\text{Re}(\alpha) > 0$ . За визначенням спектральна щільність експоненціального імпульсу рівна:

$$S(\omega) = U \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = -\frac{U}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_{t=0}^{t=\infty} \quad S(\omega) = \frac{U}{\alpha + j\omega}.$$

Можна відзначити дві важливі особливості, що відрізняють спектральну щільність експоненціального коливання від спектра імпульсу прямокутної форми:

1.  $S(\omega)$  не стає рівною 0 ні при якому кінцевому значенні частоти.
2. У випадку коли  $\alpha$  - дійсна величина спектральна щільність експоненціального імпульсу є комплексно значна функція із модулем  $|S(\omega)| = U/\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$  і аргументом  $\psi(\omega) = -\arctg(\omega/\alpha)$ .



**Рис. 5. Спектральна щільність експоненціального відео імпульсу ( $\alpha$  - дійсне число менше 0): а - нормований амплітудний спектр; б - фазовий спектр**  
**Зв'язок між тривалістю імпульсу та шириною його спектра**

Якщо проаналізувати окремі випадки, вивчені вище, то можна зробити дуже важливий висновок: чим менше тривалість імпульсу, тим ширше його спектр.  $f_b \tau_n = O(1)$ .

Під шириною спектра тут і надалі будемо розуміти частотний інтервал, в межах якого модуль спектральної щільності не менший деякого наперед заданого рівня, наприклад змінюється в межах від  $|S|_{\max}$  до  $0.1 |S|_{\max}$ . А ефективну тривалість імпульсів визначають з умови десятикратного зменшення рівня сигналу.

### Спектральні щільності не інтегрованих сигналів

Математичні моделі багатьох сигналів, що широко застосовуються, не задовольняють умові абсолютної інтегрованості, тому метод перетворень Фур'є в звичайному вигляді до них непридатний. Однак, як зазначалося, можна говорити про спектральні щільності таких сигналів, якщо допустити, що ці щільності описуються узагальненими функціями.

### Узагальнена формула Релея

Нехай два сигнали  $u(t)$  і  $v(t)$  в загальному випадку комплексно-значні, визначені своїми зворотними перетвореннями Фур'є:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (49)$$

Знайдемо скалярний добуток цих сигналів, визначивши один із сигналів через його спектральну щільність:

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} V^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega V^*(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \quad (50)$$

Внутрішній інтеграл являє собою, спектральну щільність  $U(\omega)$  сигналу  $u(t)$ . Тому:

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \overline{V(\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} (U, V). \quad (51)$$

Отримане співвідношення є узагальненою формулою Релея: Скалярний добуток двох сигналів з точністю до коефіцієнта пропорційності рівний скалярному добутку їх спектральних щільностей.

### Узагальнення поняття спектральної щільності

Нехай сигнал  $v(t)$  являє собою абсолютно інтегровану функцію. Тоді його перетворення Фур'є  $V(\omega)$  - класична функція частоти. Нехай також сигнал  $u(t)$  не задовольняє умові абсолютної інтегрованості і в звичайному класичному сенсі перетворення Фур'є  $U(\omega)$  не існує. Однак можна розширити поняття спектральної щільності, допустивши, що  $U(\omega)$  є узагальненою функцією. Для цього відповідно до узагальненої формулою Релея досить покласти, що  $U(\omega)$  - функціонал, який, діючи на відому функцію  $V(\omega)$ , дає наступний результат:  $(U, V) = 2\pi(u, v)$ .

### Спектральна щільність постійного в часі сигналу

Найпростіший не інтегрований сигнал - це постійна величина  $u(t) = A = \text{const}$ . Припустимо, що  $v(t)$  - довільний абсолютно інтегрований сигнал з відомою спектральною щільністю  $V(\omega)$ . Розкриваючи формулу (55), маємо:

$$(U, V) = 2\pi A \int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt. \quad (52)$$

Але, як легко помітити,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j0t} dt = V(0). \quad (53)$$

Звідси на підставі фільтруючого властивості дельта-функції приходимо до висновку, що рівність можливо лише за умови, що

$$U(\omega) = 2\pi A \delta(\omega). \quad (54)$$

### Спектральна щільність комплексного експоненціального сигналу

Нехай  $s(t) = \exp(j\omega_0 t)$  — комплексний експоненціальний сигнал з заданою частотою  $\omega_0$ . Цей сигнал не є абсолютно інтегрованим, оскільки при  $t \rightarrow \pm \infty$  функція  $s(t)$  не прямує до жодної межі. Перетворення Фур'є  $S(\omega)$  для сигналу повинно задовольняти співвідношенню:

$$(S, V) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} v(t) e^{-j\omega_0 t} dt = 2\pi V(\omega_0). \quad (55)$$

Звідки спектральна щільність  $S(\omega)$  визначається таким чином:

$$S(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \quad (56)$$

Відзначимо наступне:

1. Спектральна щільність комплексного експоненціального сигналу дорівнює нулю всюди, крім точки  $\omega = \omega_0$ , де вона має дельта-особливість.

2. Спектр даного сигналу несиметричний щодо точки  $\omega = 0$  і зосереджується в області або позитивних, або негативних частот.

### Спектральна щільність синусоїдального коливання

Нехай  $s(t) = \cos(\omega_0 t)$  за формулою Ейлера  $s(t) = (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})/2$  отже:

$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (57)$$

Для синусоїдального сигналу

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow -j\pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]. \quad (58)$$

### Спектральна щільність функції включення.

Обчислимо спектральну щільність функції включення  $\sigma(t)$ , яку для простоти визначимо у всіх точках, крім точки  $t = 0$ :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}.$$

Зауважимо насамперед, що функція включення виходить шляхом граничного переходу з експоненціального відеопульсу:

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \exp(-\alpha t), & t > 0 \end{cases}.$$

Тому можна спробувати отримати спектральну щільність функції включення, виконавши граничний перехід при  $\alpha \rightarrow 0$  для спектральної щільності експоненціального коливання:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha + j\omega}.$$

Безпосередній перехід до межі, згідно з яким  $\sigma(t) \leftrightarrow 1/(j\omega)$ , справедливий при всіх частотах, крім значення  $\omega = 0$ , коли необхідно більш ретельний розгляд. Перш за все виділимо в спектральній щільності експоненціального сигналу дійсну і уявну частини:

$$\frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - \frac{j\omega}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Уявна частина виразу прямує  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{-1}{\omega}$ , а дійсна  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} = \pi \sigma(\omega)$ .

Дійсно, граничне значення цього дробу при будь-яких  $\omega \neq 0$  перетворюється в нуль, і в

той же час  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha d\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(\omega/\alpha)}{1 + (\omega/\alpha)^2} = \pi$  незалежно від величини  $\alpha$ , звідки слідує:

$$\sigma(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

Дельта-особливість при  $\omega = 0$  свідчить про те, що функція має постійну складову  $1/2$ .

### Спектральна щільність радіоімпульсу

Радіоімпульс  $s_p(t)$  задається в вигляді добутку відео імпульсу  $s_b(t)$ , що грає роль огинаючої, та не інтегрованого гармонійного коливання:  $s_p(t) = s_b(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ . Щоб знайти спектральну щільність радіо імпульсу, будемо вважати відомою функцію  $S_b(\omega)$  — спектр його огинаючої. Спектр косинусоїдального сигналу з довільною початковою фазою отримується шляхом узагальнення формули для спектральної щільності  $\cos(\omega_0 t)$ :

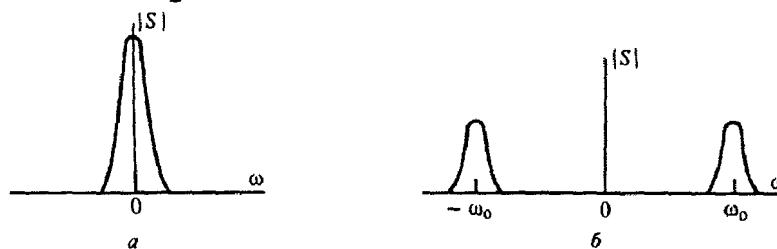
$$\cos(\omega_0 t + \varphi_0) \leftrightarrow \pi [\delta(\omega - \omega_0) e^{j\varphi_0} + \delta(\omega + \omega_0) e^{-j\varphi_0}].$$

Спектр радіоімпульсу є згортка

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S_b(\omega - \xi) [\delta(\xi - \omega_0) e^{j\varphi_0} + \delta(\xi + \omega_0) e^{-j\varphi_0}] d\xi.$$

Прийнявши до уваги фільтруючу дію дельта функції, отримаємо:

$$S_p(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\varphi_0} S_b(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi_0} S_b(\omega + \omega_0)$$



**Рис. 6. Частотні залежності модуля спектральної щільності: а — відеоімпульсу; б — радіоімпульсу**

На рис. 6 показана трансформація спектра відеоімпульсу при множенні його на високо-частотний гармонійний сигнал. Видно, що перехід від відео імпульсу до радіоімпульсу означає перенесення спектра відеоімпульсу в область високих частот - замість єдиного максимуму спектральної щільності при  $\omega = 0$  спостерігаються два максимуми при  $\omega = \pm \omega_0$ ; абсолютні значення максимумів скорочуються вдвічі.

Відзначимо, що графіки на рис. 6 відповідають ситуації, коли частота  $\omega_0$  значно перевищує ефективну ширину спектра відеоімпульсу (саме такий випадок зазвичай і реалізується на практиці). При цьому не спостерігається відчутного «перекриття» спектрів, що відповідають позитивним і негативним частотам. Однак може виявитися, що ширина спектра відеоімпульсу велика настільки (при короткому імпульсі), що вибране значення частоти  $\omega_0$  не усуває ефект «перекриття». Як наслідок, профілі спектрів відеоімпульсу і радіоімпульсу перестають бути подібними.

### Зв'язок перетворення Фур'є з коефіцієнтами ряду

Нехай  $s(t)$  - сигнал кінцевої тривалості, а  $S(\omega)$  - його спектральна функція. Отримаємо на основі  $s(t)$  періодичний сигнал взявши період повторення  $T$  не менше ніж тривалість сигналу:

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kT). \quad (59)$$

Порівнюючи формули для розрахунку перетворення Фур'є сигналу  $s(t)$  і для розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є сигналу  $s_T(t)$ , можна помітити, що ці формули зводяться до обчислення одного і того ж інтеграла. Різниця полягає в тому, що для розрахунку коефіцієнтів ряду Фур'є в підінтегральний вираз підставлені, дискретні значення частоти  $\omega_k = 2\pi k/T$ , крім того, результат інтегрування ділиться на період сигналу  $T$ .

Таким чином, між спектральною функцією  $S(\omega)$  одиночного імпульсу і коефіцієнтами  $C_k$  ряду Фур'є для періодичної послідовності таких імпульсів існує простий зв'язок:

$$C_k = \frac{1}{T} S\left(\frac{2\pi k}{T}\right). \quad (60)$$

Отже у розглянутому випадку коефіцієнти розкладу у ряд Фур'є пропорційні значенням спектральної щільності сигналу.

### Спектральна щільність ряду Фур'є

Як вище доводилось сигнал  $e^{j\omega_0 t}$  має спектральну щільність  $2\pi\delta(\omega - \omega_0)$ , тому довільний періодичний сигнал

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t} \quad (61)$$

має спектральну щільність котра представляє собою набір дельта-функцій, що розміщені на частотах гармонік ряду Фур'є:

$$S(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi C_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right) \quad (62)$$

Множники при дельта-функціях пропорційні коефіцієнтам ряду Фур'є  $C_k$ .

### Ефект Гібса

На практиці дуже часто доводиться мати справу з розривними ступінчастими функціями. Розглянемо наслідки обмеження (усікання) ряду Фур'є до деякої кінцевої кількості його членів на прикладі моделі сигналу з розривами першого роду (стрибками) (рис. 7). На рис. 8 наведені значення перших 50 членів ряду Фур'є разом з огинаючою значень модулів коефіцієнтів ряду  $F_n$ .

На рис. 9 показана реконструкція сигналу за його спектром при обмеженні числа  $N$  членів ряду Фур'є для випадків, коли  $N = 8$  (гармоніки першого максимуму спектра, центр якого відповідає головній гармоніці сигналу),  $N = 16$  (гармоніки двох перших максимумів спектру) та  $N = 40$  (гармоніки п'яти перших максимумів спектру).

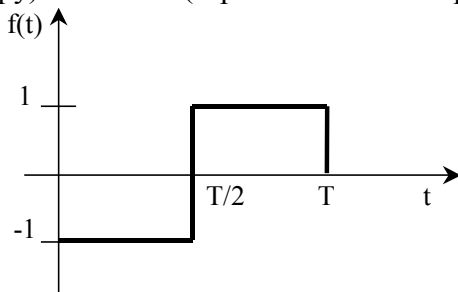


Рис. 7. Розклад сигналу з трьома розривами у комплексний ряд Фур'є

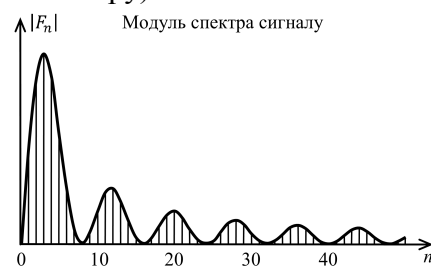


Рис. 8. Спектр відповідного сигналу

Природно, чим більше членів ряду включено у реконструкцію, тим ближче сигнал, що реконструюється, до форми вихідного сигналу. При цьому добре видно, що при реконструкції стрибків функції з'являються пульсації, які носять назву ефекту Гібса. Ефект Гібса має місце завжди при різких порушеннях монотонності функції. На стрибках ефект максимальний, в усіх інших випадках амплітуда пульсацій залежить від характеру порушень монотонності функції.

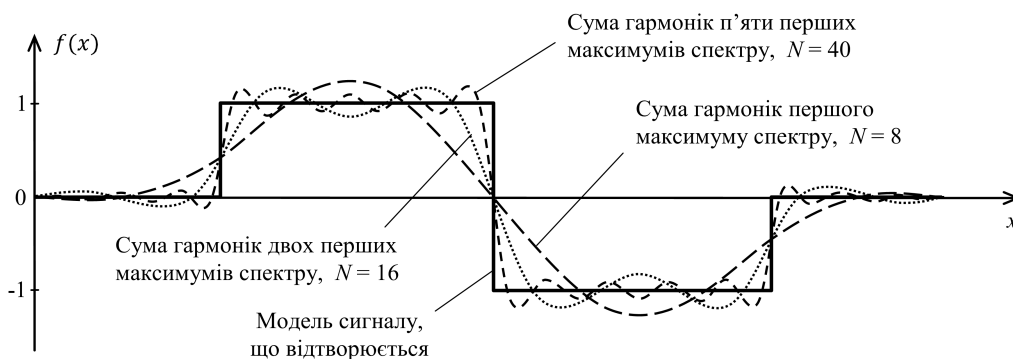


Рис. 9. Реконструкція сигналу з його спектру при обмеженні кількості гармонік

При зміні кількості членів ряду Фур'є, що сумуються, ефект Гібса не зникає. Не змінюється також відносна амплітуда пульсацій (по відношенню до амплітуди стрибка) та відносна

згасання, змінюється тільки частота пульсацій, яка визначається частотою останніх гармонік, що сумують. При частковому сумуванні рядів Фур'є певні спотворення функцій мають місце завжди. Проте, якщо енергія частки спектру сигналу, що відсікається, мала (при швидкому затуханні спектрів функцій), цей ефект може бути мало помітним. На стрибках та розривах функцій він проявляється найяскравіше. Зазвичай граничні значення максимальних викидів по обидва боки від стрибка функції не перевищують 9% від значення амплітуди стрибка.

Для ілюстрації розглянемо розклад прямокутно імпульсної функції

$$s(t) = \begin{cases} -1 & 0 < t < T/2 \\ 1 & T/2 < t < T \end{cases} \quad (63)$$

на періоді  $[0, T]$ . Формальний розклад у ряд Фур'є знаходиться підстановкою  $s(t)$  у відповідні інтеграли і обчисленням коефіцієнтів

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{k} \quad (64)$$

Тоді відповідний ряд можна записати у вигляді

$$s(t) = 4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2k+1} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}(2k+1)t\right) \quad (65)$$

Використання скінченного числа членів ряду призводить до того, що часткові суми ряду, є функціями, в яких присутні періодичні складові. А повільне спадання амплітуд призводить до появи високочастотних коливань в околі точок розриву. Для їх згладжування запропоновано згладжувати усічений ряд інтегруванням (усередненням) за періодом першого члена, що відкидається. При виборі в якості інтервалу згладжування періоду останнього члена усіченого ряду Фур'є, згладжені значення  $h_N(t)$  отримуються як середнє значення за період останнього залишеного члену:

$$h_N(t) = \frac{1}{T/N} \int_{t-(T/2N)}^{t+(T/2N)} s_N(\xi) d\xi \quad (66)$$

Тоді діючи виразом на ряд і застосовуючи відповідні тригонометричні формули остаточно отримуємо:

$$h_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \sigma(N, k) \left( a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}t\right) \right) \quad (67)$$

де  $\sigma(N, k)$  — так звані сігма-фактори:  $\sigma(N, k) = \frac{\sin(\pi k / N)}{\pi k / N}$ .

Отже "згладжений" ряд Фур'є отримується з початкового ряду множенням коефіцієнтів на відповідні сігма-фактори. Ефект згладжування досягається тим, що при  $k = N$  сігма-фактор  $N$ -го члену стає рівним нулю.

### Завдання

1. Знайти аналітичні Фур'є представлення та зарисувати спектри для наступних сигналів:

- ◇ одиночний прямокутний імпульс;
- ◇ одиночний трикутний імпульс (форма імпульсу – прямокутний трикутник);
- ◇ сигнал, заданий функцією  $\frac{\sin(x)}{x}$  ;
- ◇ сигнал, заданий функцією Гауса:  $\exp\left(-\frac{x^2}{2 \cdot a^2}\right)$ .

2. Для заданого сигналу (табл. 1)

дослідити особливості зміни спектру при:

- подовженні тривалості поодинокого імпульсу у два, чотири, вісім разів;
- повторенні сигналу – пакети з двох, чотирьох, восьми імпульсів.

Отримані спектри зарисувати окремо та зіставити для кожного з підпунктів.

При дослідженні заданого сигналу використовуйте параметри обрані раніше. Для коректного порівняння результатів, що будуть отримані, в ході проведення вказаних досліджень заданого сигналу зверніть увагу на те, що змінюватись повинен тільки один з параметрів, що досліджується, зокрема, при зміні тривалості імпульсу або кількості імпульсів слідкуйте за тим, щоб загальний час спостереження та частота дискретизації залишались сталими. При повторенні заданого сигналу потрібно враховувати, що часовий інтервал між усіма імпульсами повинен бути однаковим і його потрібно обирати враховуючи загальний час спостереження

4. Дослідити зміну спектру гармонічного сигналу при обмеженні часу його спостереження.

5. Провести синтез прямокутного імпульсу за допомогою гармонічних складових. Дослідити вплив кількості гармонік, за допомогою яких синтезується імпульс на форму імпульсу (ефект Гібса). Без використання сігма-факторів і з їх використанням.

6. Зробити висновки по роботі та оформити звіт.

#### **Контрольні питання**

1. Чим відрізняються спектральні характеристики періодичних та неперіодичних сигналів?

2. У чому полягає відмінність дискретного та неперервного перетворень Фур'є?

3. Для яких сигналів використовують дискретне перетворення Фур'є?

4. Яким чином впливає на спектр зміна кількості відліків сигналу?

5. Яким чином впливає на спектр періодичного сигналу зміна кількості його періодів на відрізок часу спостереження?

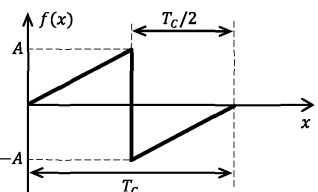
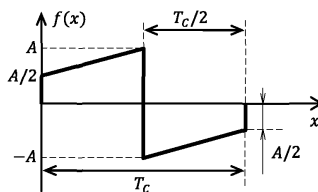
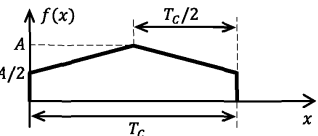
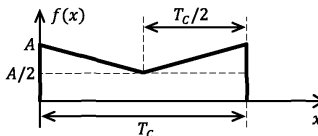
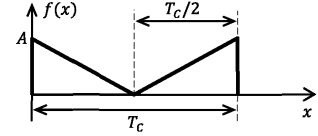
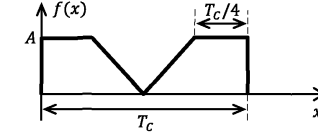
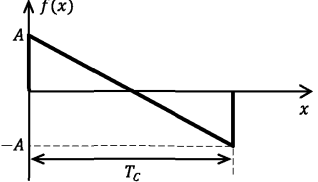
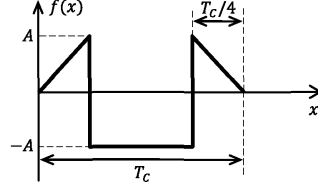
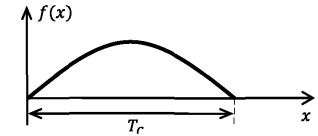
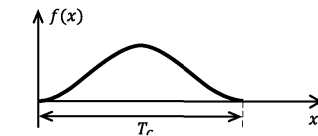
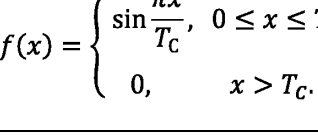
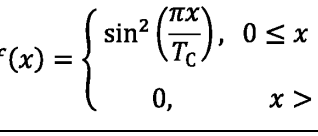
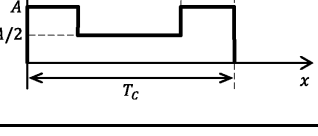
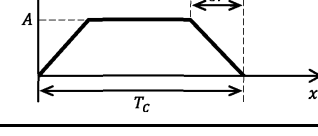
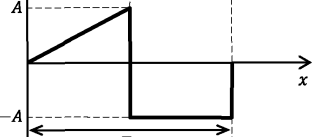
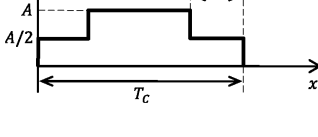
6. Для якої кількості відліків дискретного сигналу можна зробити швидке дискретне перетворення Фур'є?

7. Що таке ефект Гібса? Чим обумовлений цей ефект? Які параметри ефекту Гібса?

#### **Список літератури**

1. Орнатский П.П. Теоретические основы информационно-измерительной техники. – Киев: Вища школа, 1983. – 455 с.
2. Каганов В.И. Радиотехника + компьютер + Mathcad. – М.: Горячая линия - Телеком, 2001. – 416 с.
3. Иванов В.А. и др. Математические основы теории автоматического регулирования. Учеб. пособие для вузов. / Под ред. Чемоданова Б.К. – М.: Высшая школа, 1971. – 808 с.
4. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. – СПб.: Питер, 2003. – 604 с.
5. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио, 1986.
6. Харкевич А. А. Спектры и анализ. – М.: Мир, 1957.
7. Гольденберг Л.М. и др. Цифровая обработка сигналов: Учебное пособие для вузов. – М.: Радио и связь, 1990. – 256 с.

**Додаток. Тестові сигнали**  
**Табл 1. Тестові сигнали**

Номер	Вигляд сигналу	Прим.	Номер	Вигляд сигналу	Прим.
1		$T_c=1$	2		$T_c = 7$
3		$T_c = 6$	4		$T_c = 6$
5		$T_c = 6$	6		$T_c = 8$
7		$T_c=6$	8		$T_c = 8$
9	 $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{\pi x}{T_c}, & 0 \leq x \leq T_c, \\ 0, & x > T_c. \end{cases}$	$T_c=6$	10	 $f(x) = \begin{cases} \sin^2 \left( \frac{\pi x}{T_c} \right), & 0 \leq x \leq T_c, \\ 0, & x > T_c. \end{cases}$	$T_c=6$
11		$T_c=6$	12		$T_c = 8$
13		$T = 7$	14		$T_c = 7$
15		$T_c = 6$	16		$T_c = 6$



## Зміст

Тема роботи.....	3
Мета роботи.....	3
Спектральні представлення сигналів.....	3
Ряд Фур'є.....	3
Спектральна діаграма періодичного сигналу.....	4
Комплексна форма ряду Фур'є.....	5
Інтегральне перетворення Фур'є.....	5
Перехід від ряду Фур'є до інтегрального перетворення.....	6
Основні властивості перетворення Фур'є.....	6
Властивості дійсної і уявної частин спектральної щільності.....	7
Спектральна щільність сигналу, зміщеного в часі і за частотою.....	7
Залежність спектральної щільності сигналу від вибору масштабу виміру часу.....	7
Спектр оберненого імпульсу.....	7
Спектральна щільність похідної і невизначеного інтеграла.....	8
Спектральна щільність добутку і згортки сигналів.....	8
Спектральна щільність типових сигналів.....	9
Спектральна щільність прямокутного відео імпульсу.....	9
Спектральна щільність дельта-функції.....	9
Спектральна щільність експоненціального відео імпульсу.....	9
Зв'язок між тривалістю імпульсу та шириною його спектра.....	10
Спектральні щільності не інтегрованих сигналів.....	10
Узагальнена формула Релея.....	10
Узагальнення поняття спектральної щільності.....	10
Спектральна щільність постійного в часі сигналу.....	10
Спектральна щільність комплексного експоненціального сигналу.....	11
Спектральна щільність синусоїдального коливання.....	11
Спектральна щільність функції включення.....	11
Спектральна щільність радіоімпульсу.....	12
Зв'язок перетворення Фур'є з коефіцієнтами ряду.....	12
Спектральна щільність ряду Фур'є.....	13
Ефект Гібса.....	13
Завдання.....	14
Контрольні питання.....	15
Список літератури.....	15
Додаток. Тестові сигнали.....	16
Зміст.....	17